2020 考研数学

高分突破与答题技巧

金程考研·产品研发中心
数学教研室

一、客观题解题技巧

（一）选择题解题技巧

1.推演法

推演法是指从题设条件出发，按照习惯性思维方式，运用有关概念、性质和定理等，按部就班，经过直接推理演算得出正确结论.推演法是解答选择题的最基本的方法，从理论上讲，所有的选择题均可由推演法求解.

对于围绕基本概念设置的选择题或题中备选项为数值”形式结果或某种运算律，或题干条件给出的是某种运算形式时，常用推演法.

【例 1】【08 年数三】设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的（　　）.

(A) 跳跃间断点.　　(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

【例 2】【11 年数二、三】已知当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）.

(A) $k=1,c=4$.　(B) $k=1,c=-4$.　(C) $k=3,c=4$.　(D) $k=3,c=-4$.

【例 3】【09 年数一、二、三】设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为（　　）

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【例 4】【09 年数一、三】设随机变量 X 的分布函数为 $F\left(x\right)=0.3\Phi\left(x\right)+0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi\left(x\right)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $E\left(X\right)=$（　　）

(A) 0.　(B) 0.3.　(C) 0.7.　(D) 1.

2.图示法

图示法是只根据题设条件作出所研究问题的几何图形，然后借助几何图形的直观性，经过分析得出正确的结论.

对于题设条件有明显的几何意义，如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等，或平面

图形面积、空间立体体积；概率论中有关两事件间的关系或概率关系的命题，以及数理统计中关于α分位点的问题等，常用图示法。

【例 5】【08 年数二】曲线方程为$y=f(x)$函数在区间$[0,a]$上有连续导数，则定积分$\int_0^a xf'(x)dx$（ ）.

(A)曲边梯形$ABCD$面积. (B)梯形$ABCD$面积.

(C)曲边三角形ACD面积. (D)三角形ACD面积.

【例 6】【97 年数一】设在区间$[a,b]$上$f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$.即$S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，则（ ）.

$(A)S_1<S_2<S_3$ $(B)S_2<S_1<S_3$ $(C)S_3<S_1<S_2$ $(D)S_2<S_3<S_1$

【例 7】【13 年数一】 设随机变量$X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定α $(0<\alpha<0.5)$,常数c满足$P\{X>c\}=\alpha$，则$P\{Y>c^2\}=$（ ）.

(A) α (B) $1-\alpha$ (C) 2α (D) $1-2\alpha$

3.赋值法

赋值法是指用满足题设条件的“特殊值”，包括数值、矩阵、函数或图形等，通过推理演算，要么直接得出正确结论；要么全部否定错误的选项，得到正确的结论。

对于题干中有"……对任意……必……"特征的题目，可先用赋值法，取复合条件的“特殊值”试一试。另外，对备选项为抽象函数形式结果的，赋值法往往也能凑效。

注意：运用赋值法解答选择题时，选取的“特殊值”必须符合题中限定的条件，而且形式越简单越好。

【例 8】【11 年数二】已知$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$=( ).

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【例 9】【05 年数二】设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\}$，$f(x)$为$D$上的正值连续函数，$a,b$为常数，则$\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（ ）.

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

【例 10】【04 年数一】设A,B为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有( ).

(A) A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关.
(B) A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关.
(C) A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关.
(D) A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

4.排除法

排除法是指从题设条件出发，利用推演法把备选项中不符合条件的干扰项逐个排除(此时的推演不能直接得处正确的结论，但能得到哪些选项是错误的)；或利用赋值法排除错误的选项(此时的赋值得出的“正确”结论不止一个或看不到正确的结论，但能得到某些选项明显错误)，赋值排除既是人们通常所说的反例法.概括地讲，排除法就是想方设法说明四个选项中某三个均不正确，那么剩下的一个必然正确，所运用的方法即上述的推演排除和反例排除(即赋值排除)，具体应用时，这些方法往往交替使用，从而提高解题速度。

排除法通常适用于理论性较强、备选项形式较为抽象的题目。但对某些“数值”型的题目，若基本理论熟练，能“窥出”其中的“奥秘”，排除法也能收到意想不到的效果.

【例 11】【03 年数一】设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$对任意n成立　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【例 12】【94 年数三】设A,B都是n阶非零矩阵，且$AB=O$，则A和B的秩　　(　　).

(A)必有一个等于 0　　(B)都小于n

(C)一个小于n，一个等于n　　(D)都等于n

【例 13】设随机变量X,Y相互独立，且X服从正态分布$N(0,\sigma_1^2)$，Y服从正态分布$N(0,\sigma_2^2)$，则概率$P\{|X-Y|<1\}$(　　).

(A) 随σ_1与σ_2的减少而减少.

(B) 随σ_1与σ_2的增加而增加 .

(C) 随σ_1的增加而减少，随σ_2的减少而增加.

(D) 随σ_1的增加而增加，随σ_2的减少而减少.

5.逆推法

逆推法又称代入法，是指备选项逐一代入题设条件进行验证决定取舍。与题设条件相符的，肯定之；与题设条件不符或明显违反客观事实的，否定之。由于逆推法需要逐一验证四个选项，所以验证前应先观察分析，适当排序，否则将费时费力。

逆推法通常适用于备选项为具体”数值”结果形式，而且题干中明显含有合适的验证条件，并且验证计算又比较简单的题目。

【例 14】【92 年数二】若$f(x)$的导函数是$\sin x$，则$f(x)$有一个原函数是　　(　　).

$(A)\ 1+\sin x$　　$(B)\ 1-\sin x$　　$(C)\ 1+\cos x$　　$(D)\ 1-\cos x$

【例 15】【95 年数一】设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$,

$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则必有　　　　（　　）.

$(A)\ AP_1P_2=B$　　$(B)\ AP_2P_1=B$　　$(C)\ P_1P_2A=B$　　$(D)\ P_2P_1A=B$

（二）填空题解题技巧

填空题大部分是计算题，但填空题不像一般计算题，它只看结果，不看过程。所以，若做计算题的准确率不高，填空题很容易失分。虽然填空题是计算题，但是它和大题里面的计算题不一样，它的侧重点是很基本的计算，所以它涉及到的方法都是很基础的，大部分都是平时训练过的一些基本方法，特别是利用基本性质进行化简。有部分选择题还会涉及到一些技巧性的方法，如果掌握好了这些方法，可以让考生节约很多时间以便做后面的计算题。下面介绍考研中经常用到的几个技巧.

1.利用几何意义

【例 16】【00 年数一】$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx=$________.

【例 17】【12 年数一】$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$________.

【例 18】【91 年数一】若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P(2<X<4)=0.3$，

则 $P(X<0)=$____________.

【例 19】【07 年数一】在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为______.

2.利用物理意义(重心，形心)

【例 20】【94 年数三】设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x+y+1\right\}$，则 $\iint_D (x+y)dxdy=$________.

3.利用对称性和奇偶性

【例 21】【07 年数一】设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_\Sigma (x+|y|)dS=$______ .

4.赋值法

【例 22】【89 年数一】已知 $f'(3)=2$，则 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$_______.

【例 23】【12 年数一】设 X 为三维单位列向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-XX^T$ 的秩为_______.

二、考题预测

（一）高等数学部分

【例 1】设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}}$.

【解析】令 $x^2t=u$, 则 $\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t=\dfrac{\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x}=f(0).$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，及 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$. 则 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t=0$，

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln(1+x)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\cot x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，

证明：（Ⅰ）存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f'(\eta)$；

（Ⅲ）存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

【解析】（Ⅰ）不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$，即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

由极限的局部保号性，$\exists x_1\in(a,a+\delta)$，使得 $f(x_1)>0$，$\exists x_2\in(b-\delta,b)$，使得 $f(x_2)<0$，且 $x_1<x_2$.

由题设，在 $[x_1,x_2]$ 应用零点定理，得

$$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)，使得 f(\xi)=0.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）及题设条件，在 $[a,\xi],[\xi,b]$ 上分别应用罗尔定理，得

$$\exists \xi_1 \in (a,\xi)，使得 f'(\xi_1)=0，\exists x_2 \in (\xi,b)，使得 f'(\xi_2)=0.$$

构造辅助函数 $F(x)=f'(x)e^{-x}$，则 $F(\xi_1)=0,F(\xi_2)=0$，由题设及罗尔定理，得

$$\exists \eta \in (\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)，使得 F'(\eta)=f''(\eta)e^{-\eta}-f'(\eta)e^{-\eta}=0，即 f''(\eta)=f'(\eta).$$

（III）令 $h(x)=e^x f(x)$，由（I）知函数 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有三个零点 a,ξ,b，于是 $h'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$ 在 (a,b) 上有两个零点，因此 $f(x)+f'(x)$ 在 (a,b) 上有两个零点.

再令 $g(x)=e^{-x}\left[f(x)+f'(x)\right]$，则 $g(x)$ 在在 (a,b) 上有两个零点，故存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $g'(\zeta)=e^{-x}\left[f''(\zeta)-f(\zeta)\right]=0$,即 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

【例 3】求二重积分: $I=\iint\limits_D (x^2+xy)^2 dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x\}$.

【解析】$I=\iint\limits_D (x^2+xy)^2 dxdy$

$=\iint\limits_D (x^4+2x^3y+x^2y^2)dxdy$

$=\iint\limits_D (x^4+x^2y^2)dxdy$ (对称区域,偶倍奇零)

$=2\iint\limits_{D_1} x^2(x^2+y^2)dxdy$ (D_1 是 D 的上半部分,即上半个圆)

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^5\cos^2\theta dr$

$=\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta d\theta=\frac{64}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{12}$.

【例 4】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ 的收敛域及和函数,并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{n+!}}{n^2x^n}\right|=|x|$,

当 $|x|<1$,即 $-1<x<1$ 时，幂级数收敛,且为绝对收敛,而当 $x=\pm1$ 时,

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot 1^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(-1)^n$ 均发散,故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=xS_1(x)$.

逐项积分,得

$$\int_0^x S_1(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right)dt=\sum_{n-1}^{\infty}n^2\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=xS_2(x),$$

逐项积分,得

$$\int_0^x S_2(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n-1}^{\infty}n\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$，(此处才得到q级数)

即有 $\int_0^x S_2(t)dt=\frac{x}{1-x}$,

$$\left(\int_0^x S_2(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)',$$

得,$S_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$,

于是 $\int_0^x S_1(t)dt=xS_2(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$,

于是 $\left(\int_0^x S_1(t)dt\right)'=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'$,　　$S_1(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$,

于是 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=xS_1(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$,

而当$x=\frac{1}{2}$时,$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6$.

【例 5】计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，取上侧.

【解析】记Σ_1为$\begin{cases}x^2+y^2\le R^2\\ z=0\end{cases}$，取下侧，这样$\Sigma+\Sigma_1$构成空间封闭区域$\Omega$的外表面，记$\Sigma_1$在$xoy$面上的投影区域为$D_{xy}$. 根据积分性质和高斯公式，得

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^3+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^3+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{5}\pi R^5+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi R^5+\frac{1}{4}\pi R^4$$

（二）线性代数部分

【例 6】设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶矩阵，$\beta$ 是 4 维向量，若 $Ax=\beta$的通解是 $(1,2,3,4)^T+k(0,2,1,1)^T$，其中 k 为任意常数，$B=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)$.

(I) 证明 $r(B)=2$；

(II) 求方程组 $Bx=\alpha_2+\alpha_3$ 的通解.

【解析】(I) 由于 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1,2,3,4)^T+k(0,2,1,1)^T$，所以

$$A(1,2,3,4)^T=\beta,A(0,2,1,1)^T=0,r(A)=4-1=3,$$

即

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=\beta,2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0. \quad ①$$

所以 $B=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4)\to(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,0)$，由于进行初等变换不改变矩阵的秩，所以 $r(B)=r(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,0)=r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

根据①式可知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以 $r(B)=r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 2$. 又由于 $r(A)=3$，所以

$$r(B)=r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2.$$

(II) 由于 $r(B)=2$，所以 $Bx=0$ 中含有 $n-r(B)=4-2=2$ 个线性无关的解向量.

根据①式中 $2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，可得 $(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=0$.

根据①式中 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=\beta$，即 $2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4-(\beta-\alpha_1)=0$，可得

$$(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)\begin{pmatrix}4\\3\\2\\-1\end{pmatrix}=0.$$

令 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$，则 $B\xi_1=0,B\xi_2=0$，且 ξ_1,ξ_2 线性无关，所以可以作为 $Bx=0$ 的基础解系.

由于 $(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\beta-\alpha_1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_2+\alpha_3$，令 $\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，则 $B\eta=\alpha_2+\alpha_3$，所以 η 可作为 $Bx=\alpha_2+\alpha_3$ 的特解.

根据非齐次线性方程组解的结构知， $Bx=\alpha_2+\alpha_3$ 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$，其中

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\-1\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}，\ k_1,k_2 \text{为任意常数.}$$

【例 7】已知矩阵 A 和 B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix}1&a&-1\\1&5&1\\4&12&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.求 a,b,c 的值.

【解析】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&1\\-1&\lambda-5&-1\\-4&-12&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-a&1\\0&\lambda-5&-1\\2-\lambda&-12&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-a&1\\0&\lambda-5&-1\\0&-12-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5&-1\\-12-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+13-a)$$

由于 A 和 B 相似，所以具有相同的特征值. B 为对角矩阵，特征值为：b,b,c，故 A 的特征值也为：b,b,c，有一个二重根 b.

当 $b=2$ 时，$4-20+13-a=0\Rightarrow a=-3$.且 $2b+c=1+5+6\Rightarrow c=8$.

此时，A 的特征值为：$2,2,8$.

由于 $r(2E-A)=r\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&-3&-1\\-4&-12&-4\end{pmatrix}=1=n-k_i=3-2$，所以 A 可以相似对角化，即 A 与 B 相似.

当 $c=2$ 时，$\lambda^2-10\lambda+13-a$ 为平方和的形式，$13-a=25\Rightarrow a=-12$，且 $b=5$.

此时，A 的特征值为：$5,5,2$.

由于 $r(5E-A)=r\begin{pmatrix}4 & 12 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -4 & -12 & -1\end{pmatrix}=2\neq n-k_i=3-2$，所以 A 不可以相似对角化，即 A 不能与对角阵相似，应排除.

因此， $a=-3,b=2,c=8$.

（三）概率部分

【例 8】设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2\left(x^2-\sqrt{3}xy+y^2\right)},x,y\in R$.

(I) 求常数 A 和 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；

(II) 求 $f_{Y|X}(y|x)$；

(III) 求概率 $P\{Y<\sqrt{3}|X=2\}$.

【解析】 $f(x,y)=Ae^{-2\left(x^2-\sqrt{3}xy+y^2\right)}=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}Ae^{\frac{-1}{2}x^2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{2}}e^{-\frac{\left(y-\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$

(I) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}Ae^{\frac{-1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{2}}e^{-\frac{\left(y-\sqrt{3}x\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}dy=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}Ae^{\frac{-1}{2}x^2}$

利用概率密度的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-1}{2}x^2}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A\sqrt{2\pi}=\pi A,$$

所以 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

$$f_X(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{1}{\pi}e^{\frac{-1}{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}x^2},\ x\in R.$$

(II) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\frac{1}{\pi}e^{-2\left(x^2-\sqrt{3}xy+y^2\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}} e^{-\frac{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}{2(\frac{1}{2})^2}}, y \in R$$

(III)在 $X = 2$ 的条件下，$Y \sim N(\sqrt{3},\left(\frac{1}{2}\right)^2)$，则

$P\{Y < \sqrt{3}|X = 2\} = \frac{1}{2}$

【例 9】设随机变量 X,Y 相互独立，它们的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x.\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{1+y}{2}, & 0\le y<1,\\ 1, & 1\le y.\end{cases}$$

求函数 $Z = e^{X+Y}$ 的分布函数.

【解析】由 X 的分布函数 $F_X(x)$ 可知， X 是离散型随机变量.

X 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

设 $Z = e^{X+Y}$ 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{e^{X+Y} \le z\}.$$

若 $z \le 0$时，则 $F_Z(z) = P(\varnothing) = 0$；

若 $z > 0$时，则

$$F_Z(z) = P\{X+Y \le \ln z\}$$

$$= P\{X=0\}P\{X+Y\le \ln z|X=0\} + P\{X=1\}P\{X+Y\le \ln z|X=1\}$$

$$= \frac{1}{4}P\{Y \le \ln z\} + \frac{3}{4}P\{Y \le \ln z - 1\}$$

$$= \frac{1}{4}F_Y(\ln z) + \frac{3}{4}F_Y(\ln z - 1).$$

当$0 < z < 1$时， $\ln z < 0$，则 $F_Z(z) = 0$；

当 $1\le z<e$ 时， $0\le \ln z<1$， $\ln z-1<0$，则

$$F_Z(z)=\frac{1}{4}\times\frac{1+\ln z}{2}+\frac{3}{4}\times 0=\frac{1}{8}(1+\ln z);$$

当 $e\le z<e^2$ 时， $1\le \ln z<2$， $0\le \ln z-1<1$，则

$$F_Z(z)=\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times\frac{1+\ln z-1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\ln z;$$

当 $z\ge e^2$ 时， $\ln z\ge 2$， $\ln z-1\ge 1$，则

$$F_Z(z)=\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times 1=1.$$

综上所述， Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<1, \\ \frac{1}{8}(1+\ln z), & 1\le z<e, \\ \frac{1}{4}+\frac{3}{8}\ln z, & e\le z<e^2, \\ 1, & e^2\le z. \end{cases}$$