2020

考研数学
考场点题

HUATU
EDUCATION

华图教育 HUATU.COM

目 录

2020 考研数学重难点题型精编 2

附 1：2020 考研数学知识点重要等级汇总 9

附 2：2020 考研数学重要定理、结论汇总 14

2020 考研数学重难点题型

1、数列极限

1) 夹逼定理（填空为主）

2) 单调有界定理（结合中值定理）

3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛等价于 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在

【例】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $a\le f(x)\le b$， $x\in[a,b]$ 且 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$，其中 k 为常数， $0<k<1$，设 $x_n\in[a,b]$， $x_{n+1}=f(x_n)$， $n=1,2\cdots$

证明：（1）存在唯一 $\xi\in[a,b]$，使得 $\xi=f(\xi)$

（2） $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$

【解析】（1）令 $F(x)=x-f(x)$，则有 $F(a)=a-f(a)\le 0$， $F(b)=b-f(b)\ge 0$

由介值性定理可得，至少存在一个 $\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $\xi=f(\xi)$；

反证唯一性：若存在两个不同的点 $\xi_1\ne\xi_2\in[a,b]$，使得 $\xi_1=f(\xi_1)$， $\xi_2=f(\xi_2)$

则有 $|\xi_1-\xi_2|=|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\le k|\xi_1-\xi_2|$，可得 $k\ge 1$ 与已知 $0<k<1$ 矛盾，

故存在唯一的 $\xi\in[a,b]$，使得 $\xi=f(\xi)$.

（2）由已知可得： $|x_n-\xi|=|f(x_{n-1})-f(\xi)|\le k|x_{n-1}-\xi|\le\cdots\le k^{n-1}|x_1-\xi|\to 0$（$0<k<1$）

故有： $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$

2、函数极限

1) 等价无穷小（常见的等价无穷小）

①单一函数情形：当 $x\to 0$ 时，有：

$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$， $\arctan x\sim x$， $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$， $e^x-1\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$， $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\ne 0)$， $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$， $a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$；

$\log_a^{(1+x)}=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\frac{x}{\ln a}$.

②两函数差情形：当 $x\to 0$ 时，有：

$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$, $x-\ln(x+1)\sim\frac{x^2}{2}$, $\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}$, $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$, $arc\sin x-x\sim\frac{x^3}{6}$

$x-arc\tan x\sim\frac{x^3}{3}$

2) 洛必达法则（注意条件）

3、间断点及类型（第一类、第二类）

4、导数的运算（定义、几何意义、链式法则、隐函数求导）

【例】设 $f'(0)=1$，α,β 为常数且 $\alpha\cdot\beta\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha\sin x)-f(\beta\sin x)}{x}=$（　　）

(A) $\alpha+\beta$　　(B) $\alpha-\beta$　　(C) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(D) $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$

【答案】B（定义直接得到）

5、高价导数（关注莱布尼兹公式）

【例】设 $f(x)=(x^2-1)^{2019}$，则下列结论中不正确的是（　　）

(A) $f^{(2019)}(0)=0$　　(B) $f^{(2019)}(1)+f^{(2019)}(-1)=0$

(C) $f^{(2019)}(1)-f^{(2019)}(-1)=0$　　(D) $f^{(2019)}(1)-f^{(2019)}(-1)=2019!\cdot 2^{2020}$

【答案】C

6、微分中值定理（重点关注罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒公式）

【例 1】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：（1）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η，使得：$\dfrac{20}{f'(\xi)}+\dfrac{2000}{f'(\eta)}=2020$.

（2）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η，使得：$20f'(\xi)+2000f'(\eta)=2020$.

【提示】先使用介值性定理，再使用拉格朗日中值定理

【例 2】设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $a<c<b$，$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx=0$

（1）证明：存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1}f(x)dx,\quad f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2}f(x)dx,$

（2）证明：存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=\int_a^{\eta}f(x)dx$

【提示】使用罗尔中值定理

7、积分计算

8、积分应用（面积、体积）

【例】求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】法一：$V=2\pi\int_{-2}^{2}(3-x)(4-x^2)dx=64\pi$

法二：$V=2\pi\int_{-5}^{-1}|x|\left[4-(x+3)^2\right]dx=64\pi$

法三：$V=\pi\int_0^4\left[(3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2\right]dy=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi$

9、微分方程（一阶方程关注选择填空，二阶线性方程重点关注解答题与积分相关应用）

10、多元函数微分学（极值最值，偏导数与全微分计算；关注：复合函数、隐函数）

【例 15】设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，变换 $u=ax+y,\ v=x+by$，把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试求 a,b 的值

【答案】$a=\dfrac{1}{2},b=-2$ 或 $a=-\dfrac{1}{2},b=2$

【例 16】在平面直角坐标系中，求椭圆 $C:x^2+2xy+5y^2-16y=0$ 与直线 $L:x+y-8=0$ 的最短距离

【答案】$2\sqrt{2}$

【例 17】求函数 $f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+2y^2\le 4\}$ 上的最大值与最小值

【答案】6 和 0

11、重积分（二重积分-数二数三，关注计算计算和交换次序；三重积分数一关注计算）

【例 18】设函数 $f(x,y)=\begin{cases}2 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$，其中 $D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

（1）求函数 $F(t)=\iint\limits_{x+y\le t} f(x,y)dxdy$

（2）判断函数 $F(t)$ 是否连续，若有间断点请指出类型

【答案】（1）$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t^2, & 0\le t<1\\ -t^2+4t-2, & 1\le t<2\\ 2, & 2\le t\end{cases}$（2）连续

【例 19】设区域 $D:\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D [x+y]\ln\dfrac{y+1}{x+1}dxdy$，其中 $[\bullet]$ 为取整函数

【答案】0

【例 20】设 D 为 $y=-x(y\ge 0)$, $y=\sqrt{2-x^2}$, x 正半轴所围部分，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \min\{x,y\}\left|x^2+y^2-1\right|dxdy$$

【答案】$\dfrac{2}{15}$

12、无穷级数（数项级数关注选择，幂级数求和重点是解答题，数一傅里叶级数关注填空）

【例 21】设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，对任意实数 x，有 $g(x+1)=g(x)$，且 $\int_0^1 g(x)dx=0$，而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，记 $a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)dx$

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

【提示】比较判别法

【例 22】设 $a_0=1,a_1=-2,a_2=\dfrac{7}{2},a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n\quad(n\ge 2)$

（1）证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛

（2）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

【答案】$s(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1),\quad x\in(-1,1)$

13、曲线曲面积分（重点关注格林公式和高斯公式尤其是高斯公式，散度旋度填空看看）

【例 23 数一】 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2zdydz+y^2dzdx+(z^2-x)dxdy$，其中 Σ 是由 yoz 平面上的曲线 $z=e^y(0\le y\le 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面，取下侧.

【答案】$\pi(1-e^2)$

【练习数一】 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D$

记 D 的正向边界曲线为 ∂D，∂D 的外法线向量为 n，若当 $(x,y)\in\partial D$ 时，$u(x,y)=A$

（1）求曲线积分 $\oint\limits_{\partial D} u\dfrac{\partial u}{\partial n}ds$ 的值；

（2）证明：$u(x,y)=A$，$(x,y)\in D$

【答案】0

【例 24 数一】 设曲线 L 的方程为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$，则积分 $\oint\limits_{L}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})ds=$_______

【答案】$4a^{\frac{7}{3}}$

【线性代数】

1、行列式与矩阵（行列式以 4 阶数字型为主，填空题涉及特征值相关理论；矩阵以伴随、逆、秩和初等变换为主）

【例 25】 设 A,B,A^* 都是 n（$n\ge 3$）阶非零矩阵，且 $A^TB=O$，则 $r(B)=$（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】B

【练习】 设 A 是 3 阶非零矩阵，满足 $A^2=O$，若线性非齐次方程组 $Ax=b$ 有解，则其线性无关解向量的个数是（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】C

2、向量组（线性相关与无关判定，极大无关组与秩）

3、线性方程组求解（非齐次与公共解）

4、特征值与对角化（特征值和矩阵相似关于客观题，对角化理论关注与实对称矩阵结合）

5、二次型理论（二次型化为标准型是重点，合同与正定性）

【例 26】 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$m\ne n$，b 为 m 维列向量，则下列结论中正确的个数是（　　）

① 若 $r(A)=n$，则 $Ax=b$ 必有解

② 若 $r(A)=m$，则 $Ax=b$ 必有解

③ $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 必同解

④ $A^TAx=A^Tb$ 必有解

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】D

【例 27】 设 A 为 n 阶方阵，且 $r(A)=s$ ，β 为 n 维列向量，已知方程组 $Ax=0$ 与方程组 $\beta^Tx=1$ 没有公共解，则（　　）

(A) $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s$　　(B) $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}>s+1$　　(C) $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s+1$　　(D) 无法判断

【答案】A

【例 28】 设齐次线性方程组（1）为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2+bx_3-x_4=0\\ x_1+2x_2+ax_4=0\end{cases}$ ，又已知齐次线性方程组（2）的基础解系为 $\alpha_1=(0,1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,2,2,1)^T$ ，试问 a,b 为何值时，（1）与（2）有非零公共解？并求出所有的非零公共解.

【答案】（1） $a=-1,b=0$ （2） $x=k(-1,1,1,1)^T(k\neq0)$

【例 29】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 有特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$

（1）证明 $r(A)=2$

（2）求 $Ax=\xi_3$ 的通解

【答案】（1）略 （2） $x=k\xi_1-\frac{1}{3}\xi_3\quad\forall k\in R$

【例 30】 已知三元二次型 x^TAx 的平方项系数为 0，且 $\alpha=(1,2,-1)^T$ 满足 $A\alpha=2\alpha$

（1）求该二次型的表达式

（2）求出正交变换下的二次型的标准型

（3）若 $A^3+2A^2-4A+kE$ 正定，求 k 的范围

【答案】（1） $f=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ （2） $f=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$ （3） $k>16$

【例 31】 已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2$

记 $x=(x_1,x_2,x_3)^T,\alpha=(a_{11},a_{12},a_{13})^T,\beta=(a_{21},a_{22},a_{23},)^T,\gamma=(a_{31},a_{32},a_{33})^T$

（1）证明二次型 f 对应的矩阵是 $\alpha\alpha^T+\beta\beta^T+\gamma\gamma^T$

（2）若矩阵 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$ 为正交矩阵，证明 f 在正交变换下的标准型为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（3）若矩阵 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$ 为可逆矩阵，证明二次型 f 为正定二次型

【答案】略

【概率统计】

1、一维随机变量（常见分布计算概率，随机变量函数的分布）

【例 32】设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=n\}=\dfrac{k}{n^2-1}, n=2,3,4,\ldots$ 其中 k 为常数，则反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t\ln^{X-2}t}dt$ 收敛的概率为(　　)

(A) $\dfrac{3k}{4}$　　(B) $\dfrac{11k}{24}$　　(C) $\dfrac{7}{18}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

【答案】C

【例 33】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim B(1,p)$ 的简单随机样本，p 为未知参数，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $P\left\{\overline{X}=\dfrac{2}{n}\right\}=$(　　)

(A) p　　(B) $1-p$　　(C) $C_n^2p^2(1-p)^{n-2}$　　(D) $C_n^2p^{n-2}(1-p)^2$

【答案】C

【例 34】设 X 为随机变量，s,t 为正数，m,n 为正整数，下列结论中正确的个数为(　　)

① 若 $X\sim E(\lambda)$，则 $P\{X>s+t|X>s\}$ 与 s 无关；

② 若 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, x>1\\ 0,\quad x\le 1\end{cases}$，则当 $t>1$ 时，$P\{X\ge 2t|X\ge t\}$ 与 t 无关；

③ 若 $X\sim Ge(p)$，则 $P\{X>m+n|X>m\}$ 与 m 无关；

④若 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{k(k+1)}, k=1,2,\ldots$，则 $P\{X\ge 2n|X\ge n\}$ 与 n 无关；

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】D

2、二维随机变量（联合、边际、条件分布、独立性；随机变量函数的分布与二维正态均匀分布）

3、随机变量的期望、方差、协方差、相关系数

4、三大分布与正态总体的抽样分布、数字特征

5、矩估计与最大似然估计

【例 35 数一】已知在检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 时出现了第一类错误，则表明(　　)

(A) $\mu=\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu<\mu_0$　　(B) $\mu<\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu=\mu_0$

(C) $\mu\ge\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu<\mu_0$　　(D) $\mu<\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu\ge\mu_0$

【答案】C

【练习数一】检验显著水平是（　　）

(A) 第一类错误的概率　　(B) 第一类错误的概率上界

(C) 第二类错误的概率　　(D) 第二类错误的概率上界

【答案】B

【例 36】设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 服从参数为 λ 的指数分布，Y 服从参数为 μ 的指数分布

（1）求 $U=\max(X,Y)$ 的概率密度 $f_U(\mu)$

（2）求 $V=\min(X,Y)$ 的概率密度 $f_V(v)$

（3）求数学期望 $E(UV)$

【答案】（1） $f_U(u)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda u}+\mu e^{-\mu u}-(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)u}, & u>0\\ 0, & u\le 0\end{cases}$

（2） $f_V(v)=\begin{cases}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)v}, & v>0\\ 0, & v\le 0\end{cases}$ （3） $\dfrac{1}{\lambda\mu}$

【例 37】 设 $X\sim U[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$

（1）求 $D[X]$；

（2）求 $D(X-[X])$

（3）求 X 与 $[X]$ 的相关系数 ρ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

【答案】（1） $\dfrac{1}{2}$ （2） $\dfrac{1}{12}$ （3） $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

【例 38】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布.

（1）求概率 $P\{X+Y\le 1\}$

（2）令 $Z=\dfrac{Y}{X}$，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

【答案】（1） $\dfrac{1}{e}$ （2） $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z^2}(1-e^{-z})-\dfrac{1}{z}e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

【例 39】 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$ ，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

（1）求 EX 和 $E(X^2)$

（2）利用原点矩求 σ^2 的矩估计量 $\widehat{\sigma^2}_M$ ，并求 $E(\widehat{\sigma^2}_M)$

【答案】（1） $EX=0$; $EX^2=3\sigma^2$ （2） $\widehat{\sigma^2}_M=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ ， $E(\widehat{\sigma^2}_M)=\sigma^2$

【例 40】 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\theta^2}(2\theta-x), 0<x\le\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ ，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

（1）求 θ 的矩估计计量 $\hat{\theta}_M$ （2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$

【答案】（1） $\hat{\theta}_M=\dfrac{9}{4}\overline{X}$ （2） $\hat{\theta}_L=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

附 1：2020 考研数学知识点重要等级汇总

数学一

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求数列（或函数）的极限	★★★★	解答题
		无穷小与间断	无穷小、间断点类型	★★★	客观题
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★	客观题
		罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒公式	等式、不等式的证明	★★★★★	解答题
		曲率	求曲率、曲率圆、曲率半径	★	客观为主
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分敛散性	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积、侧面积、弧长	★★★	客观或解答
	第四章 向量代数和空间解析几何	球面、柱面、旋转曲面、二次曲面，空间曲线	会求空间曲线在坐标平面上的投影及旋转曲面方程	★	客观
	第五章 多元函数微分学	空间曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线	求空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线	★	客观
		多元复合函数、隐函数的求导法	偏导数，全微分	★★★★★	客观或解答
		极值与最值	一般/条件极值、最值	★★★★	解答
	第六章 多元函数积分学	二重积分的概念、性质及计算	二重积分的概念、性质及计算	★★★	填空或解答
		三重积分的概念、性质及计算	三重积分的概念、性质及计算	★★	填空或解答
		重积分的应用	面积、体积、质量与转动惯量	★	客观
		第一类曲线积分的性质及计算、第二类曲线积分的性质及计算	计算第一类曲线积分和第二类曲线积分	★★★★★	客观或解答
		第一类、第二类曲面积分	计算第一类曲面（客观）；计算第二类曲面（解答）	★★★★	客观或解答
	第七章 无穷级数	正项级数与交错级数	正项级数敛散性的判定	★★★★	客观或解答
		幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域；幂级数的求和与展开	求幂级数的收敛半径、收敛区间或收敛域及和函数	★★★★★	解答
	第八章常微分方程	一阶、二阶线性微分方程	一阶方程求解、二阶方程解	★★★	客观或解答
		可降阶的高阶微分方程、二阶线性方程	计算可降阶的高阶微分方程、二阶线性方程的求解	★★★	客观或解答
	第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★★	客观或解答

线性代数	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★	客观或解答
		初等矩阵、矩阵方程	初等/伴随矩阵矩阵相关性质、求解矩阵方程	★★★	客观或解答
	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价的区别和联系	★★★	选择
	第四章 线性方程组	非齐次方程组	非齐次方程组解的结构与求解	★★★★	客观或解答
		公共解与同解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解，若有，求解	★★★	解答
		基础解系	证明一个向量组为基础解系	★★★	解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	特征值与特征向量	概念、性质与相关计算	★★★	客观
		相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★★	选择或解答
	第六章 二次型	二次型的标准型与规范型	化二次型为标准型	★★★★	客观或解答
		正定二次型和正定矩阵	二次型或矩阵正定的判定和证明	★★★	客观或解答
概率论与数理统计	第一章 随机事件和概率	五大公式与独立性	乘法公式与全概率公式、条件概率	★★	客观或解答
	第二章 随机变量及其分布	一维随机变量函数的分布	一维随机变量函数的分布	★★★	客观或解答
	第三章 多维随机变量及其分布	二维离散型随机变量的分布	二维离散型随机变量的分布	★★★	客观或解答
		二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	★★★★★	解答
		随机变量函数的分布	和、差、积、商的分布	★★★	解答
	第四章 随机变量的数字特征	随机变量函数的数学期望和方差	有关数学期望与方差的计算	★★★★	客观或解答
	第五章 大数定律中心极限定理	大数定律的条件和结论，中心极限定理	大数定律的判定，中心极限定理的应用	★	客观
	第六章 数理统计的基本概念	三大分布（χ^2,T,F）	分布模型、期望与分位数	★★	客观
		正态总体的抽样	单正态总体的抽样分布	★★★	客观或解答
	第七章 参数估计	矩估计法和最大似然估计法，估计量的无偏性	求参数的矩估计和最大似然估计、无偏性与有效性	★★★★★	解答
	第八章 假设检验	单个正态总体均值的假设检验	单个正态总体均值的假设检验的计算	★	客观

数学二

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求数列（或函数）的极限	★★★★★	客观或解答
		无穷小与间断	已知极限求参数、间断点类型	★★★★	客观或解答
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★★	客观
		闭区间上连续函数的性质、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理	微分中值定理及其应用	★★★★★	解答
		曲率	求曲率、曲率圆、曲率半径	★★★	客观题为主
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积、侧面积、弧长、水压力、引力	★★★★	客观或解答
	第四章 多元函数微分学	多元复合函数、隐函数的求导法、极值	求偏导数，全微分、极值最值	★★★★★	客观或解答
	第五章 二重积分	二重积分的计算	交换次序、积分计算与简化运算	★★★★★	客观或解答
	第六章 常微分方程	一阶方程、二阶方程	一阶方程、二阶方程的求解	★★★★	客观或解答
		可降阶的高阶微分方程	计算可降阶的高阶微分方程	★★★	客观或解答
		微分方程的应用	与面积、体积、曲率、偏导数结合	★★★	解答
线性代数	第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★	客观或解答
	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★★★	解答
		伴随矩阵、初等矩阵	初等矩阵、伴随矩阵及矩阵方程	★★	选择或解答
	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价	★★★★	选择
	第四章 线性方程组	齐次、非齐次方程组	齐次、非齐次方程组解的结构与求解	★★★★	客观或解答
		同解与公共解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解，若有，求解	★★★★	解答
		基础解系	证明一个向量组为基础解系	★★★★	客观或解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	特征值与特征向量	概念、性质与相关计算	★★★	客观
		相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★	客观或解答
	第六章 二次型	二次型的标准型	化二次型为标准型（规范型）	★★★★	客观或解答
		正定二次型和正定矩阵	二次型/矩阵正定判定和证明	★★	客观或解答

数学三

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求函数（或数列）的极限	★★★	解答
		无穷小与间断点	参数有关极限、间断点类型	★★	客观
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★★	客观
		闭区间上连续函数的性质、罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理	等式、不等式的证明	★★★★★	解答
		导数的经济应用	边际与弹性	★★★★★	客观或解答
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积	★★★★	客观或解答
	第四章 多元函数微分学	多元复合函数、隐函数的求导法	求偏导数，全微分	★★★★★	客观或解答
		极值与最值	一般极值、条件极值与最值	★★★★	解答
	第五章 二重积分	交换次序与计算	直角坐标、极坐标与无界区域上的反常二重积分的计算	★★★★★	客观或解答
	第六章 无穷级数	正项级数与交错级数	正项级数敛散性的判定	★★★	客观
		幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域，简单幂级数和函数的求法	求幂级数的收敛半径、收敛区间或收敛域及和函数	★★★★★	客观或解答
	第七章 常微分方程	一阶、二阶线性微分方程	一阶方程求解、二阶方程解	★★★	客观或解答
		一阶常系数线性差分	求一阶常系数线性差分方程的通解与特解	★	客观
线性代数	第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★	客观或解答
	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★	客观或解答
		伴随矩阵、初等变换	初等矩阵、伴随矩阵及矩阵方程	★★★	客观或解答
	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价	★★	选择
	第四章 线性方程组	非齐次方程组的求解	通解的求解	★★★★★	解答
		同解与公共解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解，若有，求解	★★★★	解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★	选择或解答
		矩阵特征值的概念、性质	求抽象矩阵的特征值	★★★★	客观或解答
	第六章 二次型	标准型与规范型	二次型化标准型（实对称矩阵化对角形）	★★★★★	客观或解答

		正定二次型和正定矩阵	二次型或矩阵正定的判定和证明	★★★	客观或解答
概率论与数理统计	第一章 随机事件和概率	五大公式与独立性	乘法公式与全概率公式、条件概率	★★	客观或解答
	第二章 随机变量及其分布	一维随机变量函数的分布	一维随机变量函数的分布	★★★	客观或解答
	第三章 多维随机变量及其分布	二维离散型随机变量的分布	二维离散型随机变量的分布	★★★★	解答
		二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	★★★★★	客观或解答
		随机变量函数的分布	最值、和、差、积、商的分布	★★★	解答
	第四章 随机变量的数字特征	随机变量函数的数学期望和方差	有关数学期望与方差的计算	★★★★	客观
	第五章 大数定律和中心极限定理	中心极限定理	计算 n 个随机变量之和的极限分布	★	客观
	第六章 数理统计的基本概念	三大分布（χ^2,T,F 分布）	分布模型、期望与分位数	★★★	客观
		正态总体的抽样	单正态总体的抽样分布	★★★★	客观或解答
	第七章 参数估计	矩估计和最大似然估计	求参数的矩估计和最大似然估计	★★★★★	客观或解答

附 2：2020 考研数学重要定理、结论汇总

理论三：导数极限定理（2009 数一）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

【证明】(1) 任取 $x\in \overset{\circ}{U}_+(x_0)$，$f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则存在 $\xi\in(x_0,x)$，使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$

由于 $x_0<\xi<x$，因此当 $x\to {x_0}^+$ 时，随之有 $\xi\to {x_0}^+$，

两边取极限得：$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=f'(x_0+0)$

即：$f_+'(x_0)=f'(x_0+0)$

(2) 同理可得：$f_-'(x_0)=f'(x_0-0)$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=k$ 存在，故 $f'(x_0+0)=f'(x_0+0)=k$，

从而 $f_+'(x_0)=f_-'(x_0)=k$，即 $f'(x_0)=k$

【备注】导数极限定理适合于用来求分段函数的导数。

理论四：导函数两个特性

1.　导函数没有第一类间断点

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处有导数 $f'(x)$，则 (a,b) 中的点或为 $f'(x)$ 的连续点，或为 $f'(x)$ 的第二类间断点.

【证明】上述结论等价于“导函数不存在第一类间断点”，下面采用**反证法**来证明：

假设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，且 $x_0\in\left(a,b\right)$ 是 $f'(x)$ 的第一类间断点，

则有 $f'(x_0+0),f'(x_0-0)$ 均存在，

由导数极限定理可得：$f_+'(x_0)$ 也存在，且 $f_+'(x_0)=f'(x_0+0)$，

同理可得：$f_-'(x_0)$ 也存在，且 $f_-'(x_0)=f'(x_0-0)$，

因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故有 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=f'(x_0)$，

所以有 $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$，

即 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，与假设矛盾，故 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上不存在第一类间断点.

【备注】所谓导数无第一类间断，是在**导数处处存在**的前提下讲的。如 $f(x)=|x|$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=-1$；当 $x>0$ 时，$f'(x)=1$，在 $x=0$ 处便是第一类间断，但这与我们的结论不矛盾，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

2. 导函数具有介值性（G.Darboux 定理）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导（端点指单侧导数），$f'(a)<f'(b)$，则 $\forall c: f'(a)<c<f'(b)$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$

【证明】作辅助函数 $g(x)=f(x)-cx$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导，且 $g'(a)=f'(a)-c<0$，$g'(b)=f'(b)-c>0$，只要能证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$，即可得到结论 $f'(\xi)=c$；

由于 $g'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$，由极限的保号性可得，当 $x>a$ 且 x 与 a 充分接近时，有 $g(x)<g(a)$；同理，当 $x<b$ 且 x 与 b 充分接近时，有 $g(x)<g(b)$

故 $g(x)$ 在端点 a, b 处不取最小值，但 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以它在 $[a,b]$ 上有最小值，因此存在 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $g(\xi)=\min\limits_{a\le x\le b}g(x)$，由费马（Fermat）定理可得，$g'(\xi)=0$，

故可得结论：$f'(\xi)=c$

【备注】(1) 定理的等价形式：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上保持定号（恒正或恒负）；

(2) 由于连续函数的介值性定理有广泛的应用，因此导函数的介值性定理(**G.Darboux** 定理)也有广泛的应用（条件弱，适应范围更广）；

(3) 由达布定理很容易看出，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多存在震荡型间断点，而不可能存在第一类间断点和无穷型间断点。

理论五：费马(Fermat)引理

费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0)=0$.

证 不妨设 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0)$（如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$，可以类似地证明）. 于是，对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

从而当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性，便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

所以，$f'(x_0)=0$. 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点，临界点).

理论六：Rolle 中值定理

罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 这样，只有两种可能情形：

(1) $M=m$. 这时 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必然取相同的数值 M：$f(x)=M$. 由此，$\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=0$. 因此，任取 $\xi\in(a,b)$，有 $f'(\xi)=0$.

(2) $M>m$. 因为 $f(a)=f(b)$，所以 M 和 m 这两个数中至少有一个不等于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的端点处的函数值. 为确定起见，不妨设 $M\neq f(a)$(如果设 $m\neq f(a)$，证法完全类似)，那么必定在开区间 (a,b) 内有一点 ξ 使 $f(\xi)=M$. 因此，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant f(\xi)$，从而由费马引理可知 $f'(\xi)=0$.

定理证毕.

理论七：lagrange 中值定理（2009 年）

若 $f(x)$ 满足条件：1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；2) 在开区间 (a,b) 内可导,则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ ,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

分析：令 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，$\left(f(x)-kx\right)'\Big|_{x=\xi}=0$

证明：设 $F(x)=f(x)-kx$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，则由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=k$，即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

【注】Cauchy 中值定理、Taylor 定理、L'Hospital 法则，只需了解下证明即可

理论八：单调性的判别

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$,那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$,那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

注 1) 利用拉格朗日中值定理简证

证明：任取 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$,易验证 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日定理,应用此定理得 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$,故当 $f'(x)>0(<0)$ 时,我们有 $f(x_2)-f(x_1)>0(<0)$,即 $f(x)\uparrow(\downarrow)$.

理论九：凹凸性判别

19. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$,有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证　由 $x_1,x_2\in(a,b)$ 知 $x_0=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$,利用泰勒公式有

$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$,$\xi_1$ 介于 x_1,x_0 之间;

$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2$,$\xi_2$ 介于 x_2,x_0 之间.

由 $f''(x)\geqslant 0$ 知 $f''(\xi_1)\geqslant 0,f''(\xi_2)\geqslant 0$,故

$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$ 及 $f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$,

因此,
$$\begin{aligned}&(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\ \geqslant&(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1-t)(x_1-x_0)+t(x_2-x_0)]\\ =&f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]=f(x_0),\end{aligned}$$

即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

【注】也可使用函数单调性进行证明

理论十：定积分中值定理（2002 年，2008 年）

1.1. 定积分中值定理【2008 年数二】

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$；

【证明】因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值与最小值；

不妨设有：$m \le f(x) \le M$

根据积分估值不等式有：$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

所以有：$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

根据介值性定理可得：至少存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi)$ 成立

即：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 成立

【注】① 称 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值；

② 关于介值点 ξ 的存在性也可改为 $\xi \in (a,b)$；

【证明】$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数，不妨设为 $F(x)$，即有 $F'(x) = f(x)$，对于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理可得：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得：$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$

由牛顿-莱布尼兹公式可得：$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

故有：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi \in (a,b)$

1.2. 积分第一中值定理【2002 年数三】

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号．则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

【证明】因为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，不妨设 $g(x) \ge 0$，则有 $\int_a^b g(x)dx \ge 0$；

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值与最小值；

即有：$m \le f(x) \le M$

所以：$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$

两边积分：$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$

因为 $\int_a^b g(x)dx \ge 0$，①若 $\int_a^b g(x)dx = 0$，则根据上式可得：$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

所以对于任意的 $\xi \in [a,b]$，均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 成立；

②若 $\int_a^b g(x)dx > 0$，则有：$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

根据介值性定理可得：至少存在$\xi \in [a,b]$，使得$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi)$成立

即：$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 成立。

【备注 1】该定理使用范围更广，在解题（计算和证明）中有着广泛的应用，如果被积函数满足定理的条件，可根据本定理进行适当化简。

【备注 2】定积分的常用性质也需要重点掌握，比如周期性、奇偶性等

理论十一：重要不等式

9. 设$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上均连续，证明：

(1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$ （柯西–施瓦茨不等式）；

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ （闵可夫斯基不等式）.

证 (1) 对任意实数λ，有$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

上式左边是一个关于λ的二次三项式，它非负的条件是其系数判别式非正，即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

从而本题得证.

(2)
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_a^b [f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

从而本题得证.

理论十二：**N-L** 公式

定理 3(微积分基本定理) 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数,那么

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2-4}$$

证 已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,又根据定理 2 知道,积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数. 于是这两个原函数之差 $F(x)-\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定是某一个常数 C (第四章第一节),即

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{2-5}$$

在上式中令 $x=a$,得 $F(a)-\Phi(a)=C$. 又由 $\Phi(x)$ 的定义式(2-3)及上节定积分的补充规定(1)可知 $\Phi(a)=0$,因此,$C=F(a)$. 以 $F(a)$ 代入(2-5)式中的 C,以 $\int_a^x f(t)\,dt$ 代入(2-5)式中的 $\Phi(x)$,可得

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

在上式中令 $x=b$,就得到所要证明的公式(2-4).

理论十三：变限积分求导定理（**2008** 年）

定理 9.9 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,则由(1)式所定义的函数 Φ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 对 $[a,b]$ 上任一确定的点 x,只要 $x+\Delta x \in [a,b]$,按定义式(1)有

$$\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

因 f 在 $[a,b]$ 上有界,可设 $|f(t)| \leqslant M$, $t \in [a,b]$. 于是,当 $\Delta x > 0$ 时有

$$|\Delta\Phi| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \leqslant M\Delta x;$$

当 $\Delta x < 0$ 时则有 $|\Delta\Phi| \leqslant M|\Delta x|$. 由此得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = 0,$$

即证得 Φ 在点 x 连续. 由 x 的任意性,f 在 $[a,b]$ 上处处连续. □

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,那么积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导,并且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).\tag{2-2}$$

证　若 $x\in(a,b)$,设 x 获得增量 Δx,其绝对值足够地小,使得 $x+\Delta x\in(a,b)$,则 $\Phi(x)$(图 5-6,图中 $\Delta x>0$)在 $x+\Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

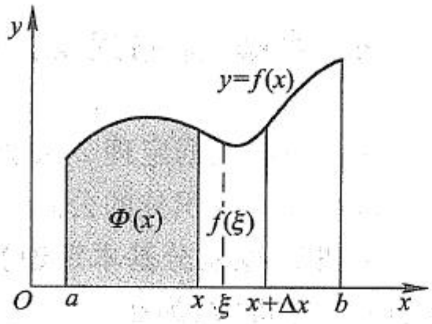

图 5-6

由此得函数的增量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再应用积分中值定理,即有等式

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x,$$

这里,ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 把上式两端各除以 Δx,得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi).$$

由于假设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,而 $\Delta x\to0$ 时,$\xi\to x$,因此 $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x)$. 于是,令 $\Delta x\to0$ 对上式两端取极限时,左端的极限也应该存在且等于$f(x)$. 这就是说,函数 $\Phi(x)$ 的导数存在,并且

$$\Phi'(x)=f(x).$$

若 $x=a$,取 $\Delta x>0$,则同理可证 $\Phi'_+(a)=f(a)$;若 $x=b$,取 $\Delta x<0$,则同理可证 $\Phi'_-(b)=f(b)$.

定理 1 证毕.

例 15 证明 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

证 根据例 14 的结论，往证齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解：

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{0}$，即$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

若 $\boldsymbol{x}$ 满足$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，即$(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=0$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$（参看第二章例 17）.

综上可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，因此 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

例 13 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

即

$$\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,l),$$

表明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 l 个列向量都是齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．记方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解集为 S，由 $\boldsymbol{b}_i\in S$，知有 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)\leqslant R_S$，即 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R_S$．而由定理 7 有 $R(\boldsymbol{A})+R_S=n$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

例 15 证明 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

证 根据例 14 的结论，往证齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解：

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{0}$，即$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

若 $\boldsymbol{x}$ 满足$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，即$(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=0$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$（参看第二章例 17）.

综上可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，因此 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

(3) A 为 n 阶方阵，$r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性无关；

(4) $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$，$r(kA)=r(A),k\neq 0$；

证明：法一：初等变换 $(A\pm B,B)\xrightarrow{\text{列}}(A,B)$

所以 $r(A\pm B)\le r(A\pm B,B)=r(A,B)\le r(A)+r(B)$

法二：分块矩阵：$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} A & A\pm B \\ O & B \end{pmatrix}$

故 $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & A\pm B \\ O & B \end{pmatrix}\ge r(A\pm B)$

【备注】$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$；$r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$

(5) $r(A)+r(B)-n \le r(A_{mn}B_{np}) \le \min\{r(A),r(B)\}$ ——“矩阵越乘秩越小”；

证明：分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} A_{mn} & -AB \\ E_n & O \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} O & -AB \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

故 $r\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & AB \\ E_n & O \end{pmatrix} = n + r(AB)$

而 $r\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \ge r(A)+r(B)$

所以 $n+r(AB) \ge r(A)+r(B)$，即 $r(A)+r(B)-n \le r(AB)$

证 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，知矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，于是据定理 6 有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$. 而 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$，因此 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$.

又 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，由上段证明知有 $R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，即 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.

综合便得 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$. 证毕

定理 6 和定理 7 的应用，我们在下一章中讨论.

(6) $\max\{r(A),r(B)\} \le r(A\mid B), r\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \le r(A)+r(B)$；

(7) A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，如果 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$；

证明：法一：分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & O \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} O & O \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

故 $r\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & O \\ E_n & O \end{pmatrix} = n$，而 $r\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \ge r(A)+r(B)$

故 $r(A)+r(B)\le n$

法二：

证 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

即
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,l),$$

表明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 l 个列向量都是齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 记方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 S，由 $\boldsymbol{b}_i \in S$，知有 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l) \leqslant R_S$，即 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R_S$. 而由定理 7 有 $R(\boldsymbol{A})+R_S=n$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

(8) 若 $r(A_{m\times n})=n$ 则 $r(AB)=r(B)$；若 $r(B_{n\times s})=n$ 则 $r(AB)=r(A)$；

证明：法一：方程组同解：构造方程组 $A_{mn}B_{ns}x=0$ 与 $B_{ns}x=0$

①若 $B_{ns}x=0$，则显然 $A_{mn}B_{ns}x=0$

②若 $A_{mn}B_{ns}x=0$，因为 $r(A_{mn})=n$，所以 $r(A^T A)=r(A_{mn})=n$

故 $(A^T A_{mn})B_{ns}x=0$，因为 $A^T A$ 可逆，故 $B_{ns}x=0$

所以 $A_{mn}B_{ns}x=0$ 与 $B_{ns}x=0$ 同解，故 $r\left(AB\right)=r\left(B\right)$

法二：显然 $r\left(AB\right)\le r\left(B\right)$

记 $AB=C$，则 $(A^T A)B=A^T C$,而 $r(A^T A)=r(A_{mn})=n$，故 $A^T A$ 可逆

所以 $B=(A^T A)^{-1}A^T C$

故 $r(B)\le r(C)=r(AB)$

所以 $r\left(AB\right)=r\left(B\right)$

24. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，E 为 n 阶单位矩阵，证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

提示：利用矩阵秩的性质⑥和⑧.

证

$A^2=A$

$\Rightarrow A(A-E)=O$

$\Rightarrow R(A)+R(A-E)\leqslant n$ （矩阵秩的性质⑧）.

另一方面，由矩阵秩的性质⑥，知

$$R(A)+R(E-A)\geqslant R(A+(E-A))=R(E)=n,$$

因 $R(E-A)=R(A-E)$，故由以上两个不等式知，$R(A)+R(A-E)=n$.

例 17 证明矩阵 $A=O$ 的充分必要条件是方阵 $A^TA=O$.

证 条件的必要性是显然的，下面证明条件的充分性.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，把 A 用列向量表示为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$A^{T}A=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1^Ta_1&a_1^Ta_2&\cdots&a_1^Ta_n\\a_2^Ta_1&a_2^Ta_2&\cdots&a_2^Ta_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^Ta_1&a_n^Ta_2&\cdots&a_n^Ta_n\end{pmatrix},$$

即 A^TA 的(i,j)元为 $a_i^Ta_j$,因 $A^TA=O$,故

$$a_i^Ta_j=0\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

特殊地,有

$$a_j^Ta_j=0\ (j=1,2,\cdots,n),$$

而

$$a_j^Ta_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2,$$

由 $a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0$,(因 a_{ij} 为实数)得

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0,\ (j=1,2,\cdots,n),$$

即

$$A=O.$$

证毕

例 18: $|A^*|=|A|^{n-1}$

证明:因为 $AA^*=|A|E$,故两边取行列式有:$|A||A^*|=|A|^n$

①若 $|A|\neq 0$,则有 $|A^*|=|A|^{n-1}$,结论成立

②若 $|A|=0$,此时有 $r(A)\leq n-1$,所以 $r(A^*)\leq 1$

故 $|A^*|=0$,所以 $|A^*|=0=|A|^{n-1}$ 成立

14. 设 A,B 都是 n 阶矩阵,且 A 可逆,证明 AB 与 BA 相似.

证 因 A 可逆,故

$$BA=(A^{-1}A)BA=A^{-1}(AB)A,$$

由定义,AB 与 BA 相似.

25. 设 A 为 n 阶($n\geqslant 2$)矩阵,A^* 为 A 的伴随矩阵,证明

$$R(A^*)=\begin{cases}n,当 R(A)=n,\\1,当 R(A)=n-1,\\0,当 R(A)\leqslant n-2.\end{cases}$$

证 (1) 当 $R(A)=n$ 时,$|A|\neq 0$. 由习题二题 24,得

$$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

从而

$$R(A^*)=n;$$

(2) 当 $R(A)\leqslant n-2$ 时,由矩阵秩的定义知 A 的所有 $n-1$ 阶子式即 A^* 的任一元素均为零,即 $A^*=O$,从而 $R(A^*)=0$;

(3) 当 $R(A)=n-1$ 时,由矩阵秩的定义,A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零,也即 A^* 中至少有一个元素不为零,故 $R(A^*)\geqslant 1$.

另一方面,因 $R(A)=n-1$,有 $|A|=0$. 由 $AA^*=|A|E$ 知,

$$AA^*=O.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(A)+R(A^*)\leqslant n,$$

把 $R(A)=n-1$ 代入上式,得 $R(A^*)\leqslant 1$. 综合以上两个关于 $R(A^*)$ 的不等式,便有 $R(A^*)=1$.

注 本题的结论很有用,值得记取.

8. 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $R(A)+R(B)<n$,证明 A 与 B 有公共的特征值,有公共的特征向量.

证 显然 $R(A)<n$. 另一方面,

$$R(A)<n\Leftrightarrow A 不可逆 \Leftrightarrow 0 是 A 的特征值;$$

同理,0 也是 B 的特征值,于是 A 与 B 有公共的特征值 0.

A 与 B 的对应 $\lambda=0$ 的特征向量依次是方程 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的非零解. 于是

$$\begin{aligned}&A 与 B 有对应于\lambda=0 的公共特征向量\\ \Leftrightarrow\ &方程组\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}有非零解\\ \Leftrightarrow\ &方程\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0 有非零解\\ \Leftrightarrow\ &R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n.\end{aligned}$$

另一方面,由矩阵秩的性质⑤

$$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A^{T},B^{T})\leqslant R(A^{T})+R(B^{T})=R(A)+R(B)<n.$$

综上,A 与 B 有公共的特征向量.